Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385
УДК 517.922, 517.925.4

Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве

Владимир Игоревич УСКОВ
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию алгебро-дифференциального уравнения

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t),$$

где A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, с всюду плотными в E_1 областями определения. Оператор A фредгольмов с нулевым индексом (далее, фредгольмов), функция $f(t)$ принимает значения в E_2; $t \in [0;T]$. Ядро оператора A полагается одномерным. Для разрешения уравнения относительно производной применяется метод каскадной декомпозиции, заключающийся в пошаговом расщеплении уравнения и условий к соответствующим уравнениям и условиям в подпространствах меньших размерностей. Рассматриваются одношаговое и двухшаговое расщепления, получены теоремы о разрешимости уравнения. Теоремы применяются для получения условий существования решения задачи Коши. Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, решается однородная задача Коши с заданными операторными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^2$. Для этого рассматривается разрешенное дифференциальное уравнение второго порядка в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^m$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t).$$

Исследуется характеристическое уравнение $M(\lambda) := \det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0$. Для многочлена $M(\lambda)$ в случае $m = 2$, $m = 3$ получены формулы Маклорена. Определено общее решение уравнения в случае единичной алгебраической кратности характеристического уравнения.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальный, уравнение второго порядка, фредгольмов оператор, банахово пространство, разрешение, задача Коши

Для цитирования: *Усков В.И.* Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 375–385. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385

Solution of a second-order algebro-differential equation in a Banach space

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the study of the algebro-differential equation

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t),$$

where A, B, C are closed linear operators acting from a Banach space E_1 into a Banach space E_2 whose domains are everywhere dense in E_1. A is a Fredholm operator with zero index (hereinafter, Fredholm), the function $f(t)$ takes values in E_2; $t \in [0;T]$. The kernel of the operator A is assumed to be one-dimensional. For solvability of the equation with respect to the derivative, the method of cascade splitting is applied, consisting in the stepwise splitting of the equation and conditions to the corresponding equations and conditions in subspaces of lower dimensions. One-step and two-step splitting are considered, theorems on the solvability of the equation are obtained. The theorems are used to obtain the existence conditions for a solution to the Cauchy problem. In order to illustrate the results obtained, a homogeneous Cauchy problem with given operator coefficients in the space $\mathbb{R}^2$ is solved. For this, it is considered the second-order differential equation in the finite-dimensional space $\mathbb{C}^m$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t).$$

The characteristic equation $M(\lambda) := \det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0$ is studied. For the polynomial $M(\lambda)$, in the cases $m = 2$, $m = 3$, the Maclaurin formulas are obtained. General solution of the equation is defined in the case of the unit algebraic multiplicity of the characteristic equation.

Keywords: algebro-differential, second-order equation, Fredholm operator, Banach space, solution, Cauchy problem

Mathematics Subject Classification: 34A09.

For citation: Uskov V.I. Razreshenie algebro-differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v banahovom prostranstve [Solution of a second-order algebro-differential equation in a Banach space]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 375–385. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается задача Коши:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{0.2}$$

где A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B} = \overline{\operatorname{dom} C} = E_1$; оператор A фредгольмов; заданы элементы $u^0 \in E_1$, $u^1 \in E_1$ и функция $f(t)$ со значениями в E_2; $t \in [0;T]$.

Под решением задачи (0.1), (0.2) подразумевается дважды дифференцируемая функция $u(t) \in E_1$ такая, что $\dfrac{du}{dt} \in E_1$, и удовлетворяет (0.1), (0.2) на $[0;T]$.

Уравнениями второго порядка описывается вращение жесткого тела (уравнение Ламе) [1], считывание информации с диска [2]; они встречаются в теории вязко-упругих процессов [3] и т. д.

Уравнения (0.1) с вырожденным коэффициентом A называется алгебро-дифференциальными. Такие уравнения исследовались другими авторами: в работе [4] A, B, C являются матрицами n-го порядка; в [5] A — нормально разрешимый фредгольмов оператора, имеющий относительно некоторой оператор-функции полный биканонический жорданов набор. Автором настоящей работы в [6] для уравнения

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = Bu(t) + f(t),$$

применялся метод каскадной декомпозиции (далее, МКД) в случае обратимости некоторого оператора, построенного с помощью коэффициентов A, B.

Цель работы: разрешить уравнение (0.1) относительно старшей производной; получить условия существования решения задачи Коши.

Исследуется случай одношагового и двухшагового расщепления уравнения. С применением МКД получены результаты о сведении к равносильной системе, сформулированные в виде теорем. Они применяются к исследованию задачи Коши; определены условия, при которых решение существует.

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, приводится пример нахождения решения задачи Коши с заданными операторными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Для этого рассматривается разрешенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t),$$

с некоторыми линейными операторами H, K, действующими в пространстве $\mathbb{C}^m$; $t \in [0;T]$. Уравнение исследуется с помощью характеристического уравнения

$$M(\lambda) := \det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0.$$

Для многочлена $M(\lambda)$ получены формулы Маклорена в случае $m = 2$ и $m = 3$.

1. Необходимые сведения

Фредгольмов оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне определяется свойством [7]:

$$E_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{1.1}$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A, $\operatorname{Coker} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Im} A$, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Положим ядро оператора A одномерным. Введем проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q)$, где I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. Зафиксируем элементы $e \in \operatorname{Ker} A$, $e \neq 0$, $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ и в одномерном подпространстве $\operatorname{Ker} A$ введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 1. \tag{1.2}$$

Имеет место следующее утверждение [8].

Лемма 1.1. *Линейное уравнение*

$$Av = w, \quad v \in E_1 \cap \operatorname{dom} A, \quad w \in E_2,$$

равносильно системе

$$\begin{aligned} &v = A^- w + ce \quad \textit{для любого} \quad c \in \mathbb{C}, \\ &\langle Qw, \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Будем обозначать через $P(i_1; i_2; \ldots; i_m)$ полиномиальный коэффициент, т. е.

$$P(i_1; i_2; \ldots; i_m) = \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_m)!}{(i_1)!(i_2)! \ldots (i_m)!}.$$

Известны следующие утверждения.

Предложение 1.1. *Имеет место следующее равенство:*

$$P(i_1; i_2; \ldots; i_m) = P(i_1 - 1; i_2; \ldots; i_m) + P(i_1; i_2 - 1; \ldots; i_m) + \ldots + P(i_1; i_2; \ldots; i_m - 1).$$

Предложение 1.2 (Обобщенная формула Лейбница). *Пусть функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, действующие в $\mathbb{R}$, дифференцируемы n раз. Тогда справедлива формула дифференцирования произведения:*

$$(f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x))^{(n)} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m \geqslant 0 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n}} P(i_1; i_2; \ldots; i_m) f_1^{(i_1)}(x) f_2^{(i_2)}(x) \ldots f_m^{(i_m)}(x)$$

2. Формула производной определитель-функции

Пусть заданы функции $f_{ij}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Определим функции

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(x)=\det\begin{pmatrix} f_{11}^{(i_1)}(x) & f_{12}^{(i_1)}(x) & \cdots & f_{1m}^{(i_1)}(x)\\ f_{21}^{(i_2)}(x) & f_{22}^{(i_2)}(x) & \cdots & f_{2m}^{(i_2)}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{m1}^{(i_m)}(x) & f_{m2}^{(i_m)}(x) & \cdots & f_{mm}^{(i_m)}(x), \end{pmatrix}$$

Справедливо следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть функции* $f_{ij}(x)$, $i,j=1,2,\ldots,m$, *дифференцируемы* n *раз. Тогда имеет место следующая формула:*

$$F^{(n)}(x)=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m\geqslant 0\\ i_1+i_2+\ldots+i_m=n}} P(i_1;i_2;\ldots;i_m)F_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(x).$$

Предложение доказывается методом математической индукции по n с применением предложения 1.2.

Далее, пусть $H=(h_{ij})$, $K=(k_{ij})$, $i,j=1,2,\ldots,m$, — линейные операторы из $\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$, задаваемые квадратными матрицами. Рассмотрим многочлен

$$M(\lambda)=\det(\lambda^2 I-\lambda H-K).$$

Нетрудно видеть, что его можно представить в виде:

$$M(\lambda)=\sum_{i=0}^{2m}\lambda^i M_i^{(m)}. \tag{2.1}$$

Обозначим $\operatorname{tr}\mathcal{A}$ — след некоторой матрицы $\mathcal{A}$.

Коэффициенты $M_i^{(m)}$ при $m=2$ и $m=3$ определяются в следующем предложении.

П р е д л о ж е н и е 2.2 (Формула Маклорена для многочлена $M(\lambda)$). *1. Пусть* $m=2$. *Тогда*

$$M_0^{(2)}=\det K,\quad M_1^{(2)}=\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},$$

$$M_2^{(2)}=\det H-\operatorname{tr}K,\quad M_3^{(2)}=-\operatorname{tr}H,\quad M_4^{(2)}=1.$$

2. Пусть $m=3$. *Тогда*

$$M_0^{(3)}=-\det K,$$

$$M_1^{(3)}=-\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33},\end{pmatrix},$$

$$M_2^{(3)}=\det\begin{pmatrix} k_{22} & k_{23}\\ k_{32} & k_{33}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{13}\\ k_{31} & k_{33}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33},\end{pmatrix},$$

$$M_3^{(3)}=\det\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23}\\ k_{32} & k_{33}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{13}\\ k_{31} & k_{33}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}$$

$$+\det\begin{pmatrix} k_{22} & k_{23}\\ h_{32} & h_{33}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{13}\\ h_{31} & h_{33}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}-\det H,$$

$$M_4^{(3)} = -\operatorname{tr} K + \det\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{32} & h_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{31} & h_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},$$
$$M_5^{(3)} = -\operatorname{tr} H, \quad M_6^{(3)} = 1.$$

Доказательство этого предложения основано на формуле Маклорена, а для вычисления производных применяется предложение 2.1.

З а м е ч а н и е 2.1. Нетрудно видеть, что при любом m выполнено:
1) $M_0^{(m)} = (-1)^m \det K, \quad M_{2m}^{(m)} = 1$;
2) если хотя бы одна координата в наборе $(i_1; i_2; \ldots; i_m)$ больше двух, то соответствующее слагаемое в (2.1) равно нулю.

3. Теоремы о разрешении уравнения относительно старшей производной

Применив лемму 1.1, сведем уравнение (0.1) к равносильной системе:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A^- B\frac{du}{dt} + A^- Cu(t) + A^- f(t) + k(t)e, \tag{3.1}$$

$$\langle QB\frac{du}{dt}, \varphi\rangle + \langle QCu(t), \varphi\rangle + \langle Qf(t), \varphi\rangle = 0, \tag{3.2}$$

где $k(t)$ — некоторая непрерывная функция, которую надлежит вычислить. Пусть $f(t)$ дифференцируема. Продифференцируем (3.2) и подставим выражение (3.1):

$$\langle (QBA^- B+QC)\frac{du}{dt}, \varphi\rangle + \langle QBA^- Cu(t), \varphi\rangle + \langle (QBA^- f(t)+Q\frac{df}{dt}), \varphi\rangle + k(t)\langle QBe, \varphi\rangle = 0. \tag{3.3}$$

Разберем два случая разрешимости уравнения (3.1).

Случай 1

Пусть
$$\langle QBe, \varphi\rangle \neq 0. \tag{3.4}$$

Выразив из (3.3) $k(t)$ и подставив в (3.1), получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = K_1^{(1)}\frac{du}{dt} + K_0^{(1)}u(t) + F^{(1)}(t), \tag{3.5}$$

в обозначениях:

$$K_1^{(1)}(\cdot) = A^- B(\cdot) - \frac{\langle (QBA^- B + QC)(\cdot), \varphi\rangle}{\langle QBe, \varphi\rangle}e,$$
$$K_0^{(1)}(\cdot) = A^- C(\cdot) - \frac{\langle QBA^- C(\cdot), \varphi\rangle}{\langle QBe, \varphi\rangle}e,$$
$$F^{(1)}(t) = A^- f(t) - \frac{\langle (QBA^- f(t) + Q\frac{df}{dt}), \varphi\rangle}{\langle QBe, \varphi\rangle}e.$$

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено* (3.4), *и функция* $f(t)$ *дифференцируема. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (3.5), (3.2).

Случай 2

Пусть теперь

$$\langle QBe, \varphi\rangle = 0, \quad \langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle \neq 0. \tag{3.6}$$

Вернемся к равенству (3.3). Поскольку $\langle QBe, \varphi\rangle = 0$, имеем:

$$\langle (QBA^{-}B + QC)\frac{du}{dt}, \varphi\rangle + \langle QBA^{-}Cu(t), \varphi\rangle + \langle (QBA^{-}f(t) + Q\frac{df}{dt}), \varphi\rangle = 0. \tag{3.7}$$

Теперь предположим, что функция $f(t)$ дважды дифференцируема. Продифференцировав (3.7) и подставив (3.1), получим уравнение относительно функции $k(t)$. В силу условия $\langle (QBA^{-}Be + QCe), \varphi\rangle \neq 0$ выражение $k(t)$ и подстановка в (3.1) приводит к уравнению:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = K_1^{(2)}\frac{du}{dt} + K_0^{(2)}u(t) + F^{(2)}(t), \tag{3.8}$$

в обозначениях:

$$\begin{aligned}
K_1^{(2)}(\cdot) &= A^{-}B(\cdot) - \frac{\langle (QB(A^{-}B)^2 + QBA^{-}C + QCA^{-}B)(\cdot), \varphi\rangle}{\langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle},\\
K_0^{(2)}(\cdot) &= A^{-}C(\cdot) - \frac{\langle (QBA^{-}BA^{-}C + QCA^{-}C)(\cdot), \varphi\rangle}{\langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle},\\
F^{(2)}(t) &= A^{-}f(t) - \frac{\langle (QBA^{-}BA^{-}f(t) + QCA^{-}f(t) + QBA^{-}\dfrac{df}{dt} + Q\dfrac{d^2f}{dt^2}), \varphi\rangle}{\langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle}.
\end{aligned}$$

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено* (3.6), *и функция* $f(t)$ *дважды дифференцируема. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (3.8), (3.2), (3.7).

4. Теоремы существования задачи Коши (0.1), (0.2)

Применив теоремы 3.1, 3.2, получим следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено* (3.4), *и функция* $f(t)$ *дифференцируема. Тогда решение задачи* (0.1), (0.2) *существует при выполнении условия*

$$\langle (QBu^1 + QCu^0 + Qf(0)), \varphi\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнено* (3.6), *и функция* $f(t)$ *дважды дифференцируема. Тогда решение задачи* (0.1), (0.2) *существует при выполнении условий*

$$\begin{aligned}
&\langle (QBu^1 + QCu^0 + Qf(0)), \varphi\rangle = 0,\\
&\langle (QBA^{-}Bu^1 + QBA^{-}Cu^0 + QCu^0 + QBA^{-}f(0) + Qf'(0)), \varphi\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

5. Решение дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t), \tag{5.1}$$

где H, K — линейные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{C}^m$; $t \in [0;T]$.

Под решением уравнения (5.1) подразумевается дважды дифференцируемая функция $u(t) \in \mathbb{C}^m$ такая, что $\dfrac{du}{dt} \in \mathbb{C}^m$, и удовлетворяет (5.1) на $[0;T]$.

Предложение 5.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — корень уравнения*

$$\det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0, \tag{5.2}$$

а h — ненулевой вектор, являющийся решением уравнения

$$(\lambda^2 I - \lambda H - K)h = 0. \tag{5.3}$$

Тогда функция

$$u(t) = e^{\lambda t}h \tag{5.4}$$

является частным решением уравнения (5.1).

Предложение доказывается подстановкой (5.4) в (5.1).

Назовем (5.2) характеристическим уравнением для (5.1).

Из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Пусть λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_{2m} — действительные корни уравнения (5.2) единичной алгебраической кратности, а h_1, h_2, $\ldots$, h_{2m} — соответствующие им решения уравнения (5.3). Тогда общее решение уравнения (5.1) равно*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2m} c_i e^{\lambda_i t} h_i,$$

где c_i — произвольные скаляры.

6. Пример

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + 8u_1(t) + (9.5 + 0.5\sqrt{385})u_2(t), \\ &2\frac{d^2u_1}{dt^2} + 4\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + (9.5 - 0.5\sqrt{385})u_1(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} u_1(0) &= a_1, \quad u_2(0) = a_2, \\ u_1'(0) &= b_1, \quad u_2'(0) = b_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Система (6.1) является уравнением вида (0.1) с операторами A, B, C, действующими в $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 9.5 + 0.5\sqrt{385} \\ 9.5 - 0.5\sqrt{385} & 0 \end{pmatrix},$$

функцией $f(t) \equiv 0$, начальными элементами $u^0, u^1 \in \mathbb{R}^2$:

$$u^0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad u^1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Оператор A, определяемый формулой (6.3), фредгольмов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, возьмем элементы $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Имеют место разложения (1.1) пространства $\mathbb{R}^2$, где

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, v_2 \neq 0 \right\}, \qquad \operatorname{Coim} A = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \operatorname{Coker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2w_1 + w_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Элемент $\operatorname{Ker} A$ равен

$$e = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $\operatorname{Coker} A$, равен

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Нетрудно видеть, что $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A = 1$. Проектор на $\operatorname{Coker} A$ равен

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, взяв элементы $v \in \operatorname{Coim} A$ и $w \in \operatorname{Im} A$ и решив уравнение $\tilde{A}v = w$, убеждаемся, что между $\operatorname{Coim} A$ и $\operatorname{Im} A$ имеется взаимно однозначное соответствие. Полуобратный оператор равен

$$A^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, предложение доказано. □

Далее, элемент (6.5) удовлетворяет условию (1.2)

$$< QBe, \varphi >= 1 \neq 0,$$

следовательно, по теореме 4.1 решение задачи (6.1), (6.2) существует при выполнении равенства:

$$(13 + \sqrt{385})a_1 + (38 + 2\sqrt{385})a_2 + 2b_1 + 2b_2 = 0. \tag{6.6}$$

Вычисления показывают, что

$$D_1 = \begin{pmatrix} -14 - \sqrt{385} & -39 - 2\sqrt{385} \\ 7.5 + 0.5\sqrt{385} & 20 + \sqrt{385} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} -8 & -9.5 - 0.5\sqrt{385} \\ 8 & 9.5 + 0.5\sqrt{385} \end{pmatrix}.$$

Возьмем в (6.2) значения

$$a_1 = a_2 = b_1 = 1, \quad b_2 = -26.5 - 1.5\sqrt{385}, \tag{6.7}$$

удовлетворяющие условию (6.6).

Применив теорему 3.1, следствие 5.1 и предложение 2.2, получим решение задачи (6.1), (6.2), (6.7):

$$u(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i e^{\lambda_i t} h_i,$$

где

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{101 + 5\sqrt{385}}{18}, \quad c_3 = \frac{-275 - 11\sqrt{385}}{40}, \quad c_4 = \frac{77 + 3\sqrt{385}}{32},$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 3,$$
$$h_1 = \begin{pmatrix} 19 + \sqrt{385} \\ -16 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 97 + 5\sqrt{385} \\ -46 - 2\sqrt{385} \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 175 + 9\sqrt{385} \\ -80 - 4\sqrt{385} \end{pmatrix}, h_4 = \begin{pmatrix} 253 + 13\sqrt{385} \\ -118 - 6\sqrt{385} \end{pmatrix}.$$

References

[1] Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике*, Наука, М., 1989. [N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, Ngo Zuy Kan, *Operator Methods in Linear Hydrodynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].

[2] R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Pearson Education International, England, 2008.

[3] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, “Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **24** (2001), 1043–1053.

[4] М. Н. Ботороева, О. С. Будникова, Л. С. Соловарова, “О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка”, *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 2019, № 3, 32–41. [M. N. Botoroeva, O. S. Budnikova, L. S. Solovarova, “On the choice of boundary conditions for second-order differential-algebraic equations”, *BSU Bulletin. Mathematics, Informatics*, 2019, № 3, 32–41].

[5] С. С. Орлов, “Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*, **2**:1 (2009), 328–332. [S. S. Orlov, “Continuous solutions of a second-order degenerate integro-differential equation in Banach spaces”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **2**:1 (2009), 328–332].

[6] В. И. Усков, “Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:136 (2021), 414–420. [V. I. Uskov, “Solving a second-order algebro-differential equation with respect to the derivative”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:136 (2021), 414–420].

[7] С. М. Никольский, “Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах”, *Известия Академии Наук СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. Nikolsky, “Linear equations in normed linear spaces”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **7**:3 (1943), 147–166].

[8] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай”, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 07.07.2022 г.
Поступила после рецензирования 28.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 07.07.2022
Reviewed 28.10.2022
Accepted for press 24.11.2022